NOTA DE AULA
PROF. JOSÉ GOMES RIBEIRO FILHO

TRABALHO E POTENCIAL ELÉTRICO

01.INTRODUÇÃO

O conceito de energia potencial foi introduzido no Capítulo "Energia Mecânica" em conexão com forças conservativas como a gravidade e a força elástica de uma mola. Usando o princípio da conservação de energia em um sistema isolado, evitamos frequentemente trabalhar diretamente com forças ao resolver problemas mecânicos. Neste capítulo utilizaremos o conceito de energia em nosso estudo da eletricidade. Como a força eletrostática (dada pela lei de Coulomb) é conservativa, os fenômenos eletrostáticos podem convenientemente ser descritos em termos de uma função energia potencial elétrica. Este conceito nos permite definir uma grandeza denominada potencial elétrico, uma função escalar da posição e, assim, conduz a um meio mais simples de descrever alguns fenômenos eletrostáticos do que o método do campo elétrico. Como veremos nos capítulos subsequentes, o conceito de potencial elétrico é de grande valor prático.

02.REVISÃO DE TRABALHO E ENERGIA

Quando uma partícula carregada se desloca em um campo elétrico, o campo exerce uma força que realiza um trabalho sobre a partícula. Esse trabalho realizado pode ser sempre expresso em termos da energia potencial elétrica. Tal como a energia potencial gravitacional depende da altura em que se encontra a massa sobre a superfície terrestre, a energia potencial elétrica depende da posição da partícula carregada no campo elétrico. Vamos começar fazendo a revisão de alguns pontos essenciais do capítulo trabalho e energia. Inicialmente, quando uma força $\vec{F}$ atua sobre uma partícula que se move de um ponto a até um ponto b, o trabalho W_{ab} realizado pela força é dado pela integral de linha:

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b F\cos\phi \, d\ell \qquad (2.1)$$

onde $d\ell$ é um deslocamento infinitesimal ao longo da trajetória seguida pela partícula e ϕ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $d\vec{\ell}$ em cada ponto da trajetória.

Em segundo lugar, se a força $\vec{F}$ for conservativa, o trabalho realizado por $\vec{F}$ pode ser sempre expresso em função da energia potencial elétrica U. Quando a partícula que se move de um ponto no qual a energia potencial é U_a até um ponto no qual a energia potencial é U_b, a variação da energia potencial é $\Delta U = U_b - U_a$ e o trabalho W_{ab} realizado pela força é dado

$$W_{ab} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U \qquad (2.2)$$

Quando W_{ab} é positivo, U_a é maior do que U_b; logo, ΔU é negativa e a energia potencial diminui. Isso é o que ocorre quando uma bola de futebol cai de um ponto mais elevado (a) até um ponto mais baixo (b) sob a influência da gravidade da Terra; a força da gravidade realiza um trabalho positivo, e a energia potencial gravitacional diminui. Quando uma bola é atirada de baixo para cima, a força da gravidade realiza um trabalho negativo durante o intervalo em que a bola está subindo e a energia potencial gravitacional aumenta.

Em terceiro lugar, o teorema do trabalho-energia afirma que a variação da energia cinética $\Delta K = K_b - K_a$ durante qualquer deslocamento é igual ao trabalho total realizado sobre a partícula. Quando somente forças conservativas realizam trabalho sobre a partícula, então a Equação (2.2) fornece o trabalho total realizado e $K_b - K_a = -(U_b - U_a)$. Geralmente, escrevemos esse resultado na forma

$$K_a + U_a = K_b + U_b \qquad (2.3)$$

Ou seja, a energia mecânica total (energia cinética mais energia potencial) é conservada nas circunstâncias mencionadas.

03.ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA DE DUAS CARGAS PUNTIFORMES

Considere inicialmente uma carga puntiforme situada em um campo elétrico produzido por uma distribuição estática de cargas. Lembre-se do capítulo anterior no qual dissemos que podemos representar qualquer distribuição de cargas como uma coleção de cargas puntiformes, e que, portanto, é útil calcular o trabalho realizado sobre uma carga de teste q_0 que se move no campo elétrico produzido por uma única carga estática Q. Tomemos um deslocamento radial da carga teste q_0 como indicado na Figura 2.1, de um ponto a até um ponto b. A força sobre q_0 é dada pela lei de Coulomb e seu componente radial é

$$F_r = k\frac{Qq}{r^2} \qquad (2.4)$$

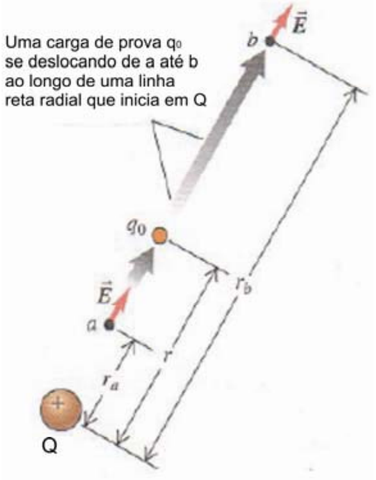


FIGURA 2.1 (a) A carga q_0 se move ao longo de uma linha reta que se estende radialmente a partir da carga q_0. À medida que ela se desloca de a até b, a distância varia de r_a até r_b.

Quando Q e q_0 possuem o mesmo sinal (+ ou -), a força é repulsiva e F_r é positivo; quando o sinal de uma das cargas é contrário ao da outra, a força é atrativa e F_r é negativo. A força não é constante durante o deslocamento é preciso integrar para calcular o trabalho realizado por essa força sobre q_0 quando ela se desloca de a até b. Encontramos

$$W_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} F_r\,dr = \int_{r_a}^{r_b} k\frac{Qq}{r^2}dr = Qq\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) \qquad (2.5)$$

O trabalho realizado pela força elétrica para essa trajetória particular depende apenas do ponto inicial e do ponto final.

Na verdade, o trabalho realizado é sempre o mesmo para todas as possíveis trajetórias entre a e b. Para provar isso, considere um deslocamento geral (Figura 2.2) no qual a e b não estejam situados sobre a mesma reta radial. Pela Equação (2.1), o trabalho realizado sobre q_0 durante esse deslocamento é dado por

$$W_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} F\cos\phi\, d\ell = \int_{r_a}^{r_b} k\frac{Qq}{r^2}\cos\phi\, d\ell$$

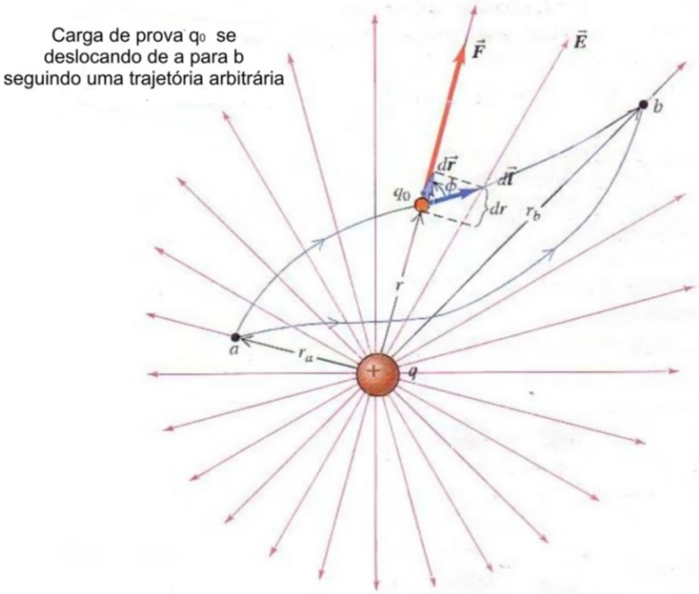


FIGURA 2.2 O trabalho realizado sobre a carga q_0 pelo campo elétrico produzido por uma carga q depende somente das distâncias r_a e r_b.

Porém, a figura mostra que $\cos\phi\, d\ell = dr$. Ou seja, o trabalho realizado durante um deslocamento infinitesimal $d\vec{\ell}$ depende somente da variação dr da distância r entre as duas cargas, que fornece o componente radial do deslocamento. Portanto, a Equação (2.5) é válida também para esse deslocamento mais geral; o trabalho realizado pelo campo elétrico $\vec{E}$ produzido por Q depende somente de r_a e r_b, e não dos detalhes da trajetória. Concluímos também que, se q_0 volta ao seu ponto inicial, o trabalho realizado nessa trajetória fechada é igual a zero (pois a integral na Equação (2.5) vai de r_a até r_a). Essas são as características necessárias de uma força conservativa.

Vemos que as equações (2.2) e (2.5) são consistentes, se definirmos a grandeza kQq_0/r_a como a energia potencial U_a quando a carga q_0 está no ponto a a uma distância r_a de Q, e se definirmos a grandeza kQq_0/r_b como a energia potencial U_b quando a carga q_0 está no ponto b a uma distância r_b de Q. Logo, a energia potencial U quando a carga q_0 está em um ponto situado a qualquer distância r de Q é dada por

$$U = k\frac{Qq}{r} \qquad (2.6)$$

04.ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA COM DIVERSAS CARGAS PUNTIFORMES

Suponha que o campo elétrico $\vec{E}$ no qual uma carga q_0 se move seja produzido por um conjunto de cargas puntiformes Q_1, Q_2, Q_3 ...,separadas de q_0 pelas distâncias r_1, r_2, r_3 ... como indica a Figura 2.3.

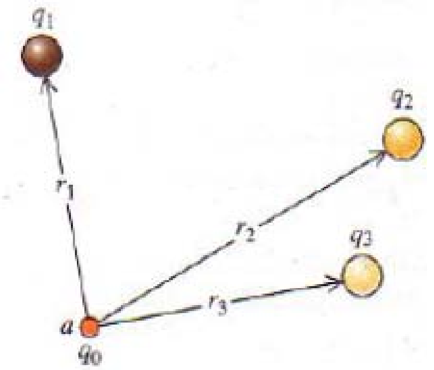


FIGURA 2.3 A energia potencial associada com a carga de teste q_0 no ponto a depende das cargas q_1, q_2 e q_3, bem como das distâncias r_1, r_2 e r_3 entre essas cargas e o ponto a.

O campo elétrico total é dado pela soma vetorial dos campos elétricos produzidos pelas cargas individuais do conjunto e o trabalho total realizado sobre q_0 durante qualquer deslocamento é a soma das contribuições das cargas individuais. De acordo com a Equação (2.6), concluímos que a energia potencial associada com a carga de teste q_0 no ponto a indicado na Figura 2.3 é a soma algébrica (e não a soma vetorial) dada por

$$U = kq_0\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3} + \ldots\right) = kq_0\sum_i \frac{Q_i}{r_i} \qquad (2.7)$$

Quando a carga q_0 está em outro ponto b, a energia potencial é dada pela mesma expressão, porém agora r_1, r_2... são as distâncias entre Q_1, Q_2... e o ponto b. O trabalho realizado sobre a carga q_0 quando ela se desloca de um ponto a até um ponto b ao longo de qualquer trajetória é igual à diferença U_b - U_a de energia potencial quando q_0 está em a e no ponto b.

Podemos representar qualquer distribuição de cargas como um conjunto de cargas puntiformes. Portanto, a Equação (2.7) mostra que é sempre possível encontrar uma função energia potencial para qualquer campo elétrico estático. A partir disso, podemos concluir que qualquer campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas estáticas dá origem a uma força conservativa

A Equação (2.7) fornece a energia potencial associada com a presença da carga de teste q_0 no campo elétrico $\vec{E}$ produzido por $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$. Porém, também existe uma energia potencial associada com o conjunto dessas outras cargas. Se inicialmente as cargas Q_1,Q_2, Q_3 ... estão separadas por distâncias infinitas e a seguir aproximamos duas cargas Q_i e Q_j de modo que a distância entre elas seja r_{ij}, a energia potencial total U é a soma das energias potenciais oriundas das interações de cada par de cargas. Podemos escrever o resultado na forma

$$U = k\sum_{i<j} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}} \qquad (2.8)$$

Essa soma deve ser estendida para todos os pares de cargas; não podemos fazer i = j (porque isso equivaleria a introduzir um termo da interação da carga com ela mesma), e consideramos apenas i < j para garantir que contamos apenas uma vez cada par de cargas. Portanto, para levarmos em conta a interação da carga Q_3 com a carga Q_4, incluímos um termo com i = 3 e j = 4, porém não um termo i = 4 e j = 3.

05.POTENCIAL ELÉTRICO

Na seção 3.0, examinamos a energia potencial U associada com uma carga de teste q_0 em um campo elétrico. Agora vamos examinar a energia potencial em uma base "por unidade de carga", analogamente ao caso do campo elétrico, que é a força elétrica por unidade de carga que atua sobre uma partícula no campo. Isso conduz ao conceito de potencial elétrico, em geral chamado simplesmente de potencial. Esse conceito é muito útil para o cálculo das energias envolvidas em partículas carregadas. Ele também facilita a determinação de um campo elétrico, visto que o potencial elétrico está intimamente relacionado com o campo elétrico $\vec{E}$. Para determinar um campo elétrico, geralmente é mais fácil calcular inicialmente o potencial elétrico e a seguir obter o campo elétrico a partir do potencial elétrico.

Denomina-se potencial elétrico a energia potencial por unidade de carga. Definimos o potencial elétrico V em qualquer ponto de um campo elétrico como a energia potencial U por unidade de carga associada com uma carga de teste q_0 nesse ponto:

$$V \equiv \frac{U}{q_0}$$ 2.9

A energia potencial e a carga são escalares, de modo que o potencial elétrico é uma grandeza escalar. De acordo com a Equação (2.9), suas unidades são obtidas dividindo-se as unidades de energia pelas unidades de carga. A unidade SI de potencial elétrico é chamada de volt (1V) — em homenagem ao cientista italiano e pesquisador experimental da eletricidade Alessandra Volta (1745-1827) — sendo igual a 1 joule por coulomb:

1 V = 1 volt = 1 J/C = 1 joule/coulomb.

Vamos escrever a Equação (2.2), que iguala o trabalho realizado pela força elétrica durante um deslocamento de a até b com a grandeza - U = -(U_b - U_a), usando-se uma base de "trabalho por unidade de carga". Dividimos essa grandeza por q_0 e obtemos

$$\frac{W_{ab}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -\left(V_b - V_a\right) = V_a - V_b \qquad (2.10)$$

onde $V_a = U_a/q_0$ é a energia potencial por unidade de carga no ponto a e V_b é definido de modo análogo. Chamamos V_a de potencial no ponto a e V_b de potencial no ponto b. Logo, o trabalho realizado por unidade de carga pela força elétrica quando a carga se desloca de a até b é igual ao potencial no ponto a menos o potencial no ponto b.

A diferença V_a - V_b denomina-se potencial de a em relação a b; algumas vezes, essa diferença será abreviada como $V_{ab} = V_a - V_b$ (observe a ordem dos índices). Geralmente chamamos isso de diferença de potencial entre a e b, porém trata-se de algo que pode ser ambíguo, a menos que o ponto de referência seja especificado. Em circuitos elétricos, que examinaremos em capítulos posteriores, a diferença de potencial entre dois pontos será chamada de voltagem.

Para encontrarmos o potencial V de uma única carga puntiforme q, dividimos a Equação (2.6) por q_0:

$$V = \frac{U}{q_0} = k\frac{Q}{r} \qquad (2.11)$$

onde r é a distância entre a carga Q e o ponto onde o potencial está sendo calculado. Quando Q é positivo, o potencial por ela produzido é positivo em todos os pontos do espaço; quando Q é negativo, o potencial por ela produzido é negativo em qualquer ponto. Em ambos os casos, V é igual a zero para $r = \infty$, quando a distância entre a carga e o ponto é infinita. Observe que o potencial, do mesmo modo que o campo elétrico, não depende da carga de teste q_0 que foi usada para defini-lo.

Analogamente, dividindo-se a Equação (2.7) por q_0 encontramos o potencial produzido por um conjunto de cargas:

$$V = \frac{U}{q_0} = k\sum_i \frac{Q_l}{r_l} \qquad (2.12)$$

Nessa expressão, r_i é a distância entre a i-ésima carga, Q_i e o ponto onde o potencial está sendo calculado. Assim como o campo elétrico total de um conjunto de cargas é dado pela soma vetorial de todos os campos elétricos produzidos pelas cargas individuais, o potencial elétrico produzido por um conjunto de cargas puntiformes é dado pela soma escalar dos potenciais produzidos pelas cargas individuais.

Consideramos, então, o potencial devido a um pequeno elemento de carga dQ, tratando esse elemento como uma carga pontual (Figura 2.4).

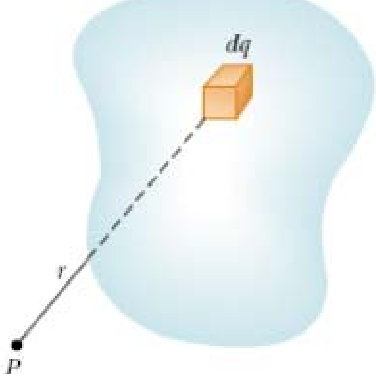


FIGURA 2.4 O potencial elétrico no ponto P devido a uma distribuição contínua de carga pode ser calculado dividindo-se a distribuição de carga em segmentos de carga dQ e somando-se as contribuições para o potencial de todos os segmentos.

No caso de uma distribuição contínua de cargas ao longo de uma linha, ao longo de uma superfície ou de um volume, dividimos as cargas em elementos de carga dQ, e a soma indicada na Equação (2.12) se transforma em uma integral:

$$V = k\int \frac{dQ}{r} \qquad (2.13)$$

onde r é a distância entre o elemento de carga dQ e o ponto onde o potencial V está sendo calculado.

Quando conhecemos uma dada coleção de cargas, a Equação (2.12) geralmente fornece o método mais fácil para calcular o potencial V. Contudo, em alguns problemas para os quais o campo elétrico seja fornecido ou facilmente obtido, é mais fácil calcular V a partir de $\vec{E}$. A força F sobre uma carga de teste q_0 é dada por $\vec{F} = q_0\vec{E}$; logo, pela Equação (2.1), o trabalho realizado pela força elétrica quando a carga de teste se move de a até b é dado por

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b q_0\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Dividindo essa relação por q_0 e comparando-a com a Equação (2.10), encontramos

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_a^b E\cos\phi\, d\ell \qquad (2.14)$$

Do mesmo modo que o valor de W_{ab} independe da trajetória, o valor de V_a - V_b não depende da trajetória que liga a até b .

A Figura 2.5a mostra uma carga puntiforme positiva. O campo elétrico aponta para fora da carga, e V= kQ/r é positivo para qualquer distância finita entre o ponto e a carga. Ao se afastar da carga, no mesmo sentido de $\vec{E}$, você se desloca para valores menores de V; aproximando-se da carga, no sentido contrário ao de $\vec{E}$, você se desloca para valores mais elevados de V. Para a carga negativa puntiforme indicada na Figura 2.5b, o campo elétrico $\vec{E}$ aponta para dentro da carga, e V = kQ/r é negativo para qualquer distância finita entre o ponto e a carga. Nesse caso, quando você se aproxima da carga, no mesmo sentido de $\vec{E}$, você se desloca para valores decrescentes (mais negativos) de V. Quando você se afasta da carga, no sentido oposto ao de $\vec{E}$, se desloca para valores crescentes (menos negativos) de V. Regra geral válida para qualquer campo elétrico: ao se mover no mesmo sentido de $\vec{E}$, você se desloca para valores decrescentes de V, e, movendo-se em sentido oposto ao de $\vec{E}$, se desloca para valores crescentes de V.

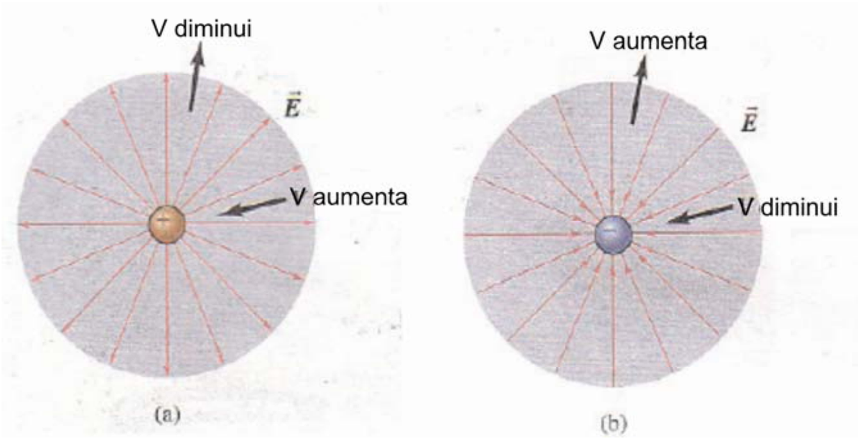


FIGURA 2.5 (a) Uma carga puntiforme positiva, (b) Uma carga puntiforme negativa. Em ambos os casos, movendo-se no mesmo sentido de $\vec{E}$, o potencial elétrico V diminui e, movendo-se em sentido oposto ao de $\vec{E}$, o potencial V aumenta.

06. SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

As linhas de campo auxiliam a visualização de um campo elétrico. De modo análogo, os potenciais em diversos pontos de um campo elétrico podem ser representados graficamente por superfícies equipotenciais. Elas empregam a mesma ideia básica de mapas topográficos como aqueles usados por excursionistas e alpinistas (Figura 2.6). Em um mapa topográfico, as linhas de contorno ligam pontos com a mesma altura. Poderia ser desenhada qualquer quantidade dessas linhas, porém é suficiente mostrar algumas linhas de contorno para indicar alturas igualmente espaçadas. Quando um corpo de massa m se desloca ao longo de uma linha de contorno, a energia potencial gravitacional mgy não varia porque a altura permanece constante ao longo dessa linha. Logo, uma linha de contorno em um mapa topográfico é uma linha de energia potencial gravitacional constante.

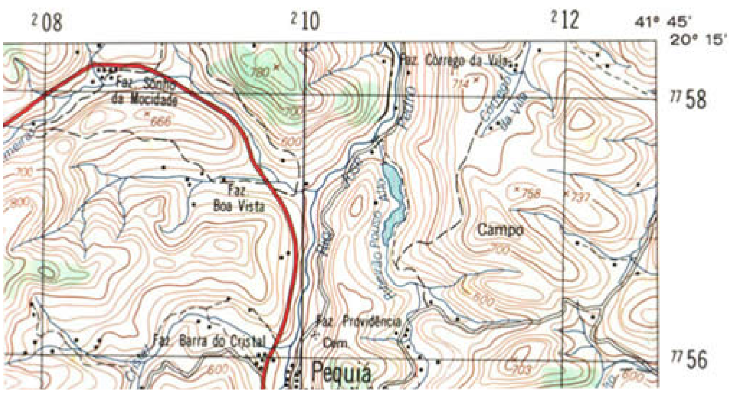


FIGURA 2.6 Linhas de contorno de um mapa topográfico.

Por analogia com as linhas de contorno em um mapa topográfico, uma superfície equipotencial é uma superfície em três dimensões sobre a qual o potencial elétrico V permanece constante em todos os seus pontos. Quando uma carga de teste q_0 se desloca de um ponto a outro sobre essa superfície, a energia potencial elétrica qV permanece constante. Em uma região onde existe um campo elétrico, podemos construir uma superfície equipotencial em qualquer local. Nos diagramas, costuma ser suficiente mostrar algumas superfícies equipotenciais mais representativas, em geral igualmente espaçadas, para indicar que a diferença de potencial entre duas superfícies adjacentes é constante. Nenhum ponto pode possuir dois potenciais diferentes, portanto as superfícies equipotenciais não podem se cruzar nem se tangenciar.

Como a energia potencial não varia quando uma carga de teste se desloca ao longo de uma superfície equipotencial, o campo elétrico não pode realizar trabalho sobre essa carga. Portanto, $\vec{E}$ deve ser perpendicular à superfície em todos os seus pontos, de modo que a força $q_0\vec{E}$ será sempre perpendicular ao deslocamento de uma carga que se move sobre a superfície. As linhas de campo elétrico e as superfícies equipotenciais são sempre mutuamente perpendiculares. Geralmente, uma linha de campo é uma curva e uma superfície equipotencial é uma superfície curva. No caso particular de um campo elétrico uniforme, para o qual as linhas de campo são retas paralelas e igualmente espaçadas, as superfícies equipotenciais são planos perpendiculares a essas retas.

A Figura 2.7 mostra diversos arranjos de cargas. As linhas de campo elétrico estão situadas no plano das cargas; essas linhas cortam as obtidas pela interseção das superfícies equipotenciais com o plano da página. Em cada ponto de interseção entre uma linha de campo elétrico e uma linha equipotencial, as duas curvas são perpendiculares.

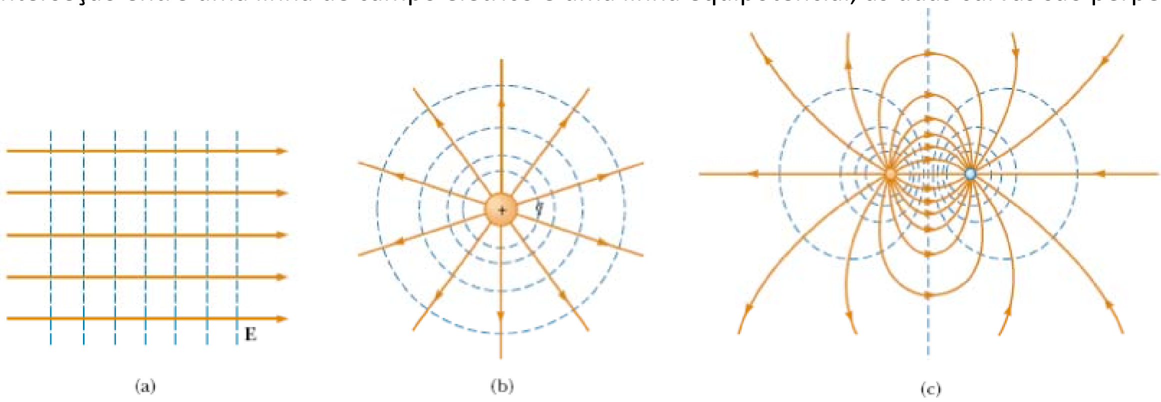


FIGURA 2.7 Superfícies equipotenciais (linhas tracejadas) e linhas do campo elétrico (linhas contínuas) para (a) um campo elétrico uniforme produzido por um plano infinito de carga, (b) uma carga pontual e (c)um dipolo elétrico. Em todos os casos, as superfícies equipotenciais são perpendiculares às linhas do campo elétrico em todos os pontos.

07. GRADIENTE DE POTENCIAL

O campo elétrico e o potencial são intimamente relacionados. A Equação (2.14), re-escrita a seguir, expressa um aspecto dessa relação:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Quando conhecemos $\vec{E}$ em diversos pontos, podemos usar essa equação para calcular uma diferença de potencial. Devemos ser capazes de inverter essa operação; quando se conhece a diferença de potencial em diversos pontos, é possível aplicar essa equação para calcular $\vec{E}$. Considerando V uma função das coordenadas (x, y, z) de um ponto do espaço mostraremos que $\vec{E}$ está relacionado diretamente com as derivadas parciais de V em relação a x,y e z. Na Equação (2.14), V_a-V_b é o potencial de a em relação ao ponto b, ou seja, a variação do potencial quando um ponto se desloca de b até a. Podemos escrever

$$V_a - V_b = \int_b^a dV = -\int_a^b dV \qquad (2.15)$$

onde dV é uma variação infinitesimal do potencial que acompanha um elemento da trajetória $d\vec{\ell}$ de b até a. Comparando com a Equação (2.14), obtemos

$$-\int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Essas duas integrais devem possuir o mesmo valor para qualquer par de limites a e b e, para que isso seja verdade, os integrandos devem ser iguais. Logo, para qualquer deslocamento infinitesimal $d\vec{\ell}$,

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Para interpretar essa expressão, escrevemos $\vec{E}$ e $d\vec{\ell}$ em termos dos seus respectivos componentes : $\vec{E}$ = **i**E_x+**j**E_y + **k**E_z e $d\vec{\ell}$ = **i**d_x + **j**d_y + **k**d_z. Obtemos então

$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$

Suponha que o deslocamento seja paralelo ao eixo Ox; logo, dy = dz= 0. Então, $-dV=E_x dx$ ou $E_x=-(\partial V/\partial x)_{y,z\rightarrow const}$, onde os índices servem para salientar que somente x está variando na derivada; lembre-se de que V é função de x, y e z. E isso é exatamente a definição da derivada parcial $\partial V/\partial x$. Os componentes y e z de $\vec{E}$ são relacionados de modo análogo com as derivadas parciais de V correspondentes, portanto temos

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial Z} \qquad (2.16)$$

Essas equações são consistentes com as unidades de V/m do campo elétrico. Podemos escrever $\vec{E}$ em termos dos vetores unitários do seguinte modo:

$$\vec{E}_x = -\left(\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial Z}\right) \qquad (2.17)$$

Em notação vetorial, denomina-se gradiente a seguinte função f:

$$\vec{\nabla} f = -\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial Z}\right) f \qquad (2.18)$$

O operador designado pelo símbolo V denomina-se "grad" ou "del". Portanto, em notação vetorial, escrevemos

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \qquad (2.19)$$

A equação anterior pode ser lida como "$\vec{E}$ é o gradiente de V com sinal contrário", ou então "$\vec{E}$ é igual a menos grad de V". A grandeza $\vec{\nabla} V$ denomina-se gradiente de potencial.

Em cada ponto, o gradiente de potencial aponta no sentido para o qual V cresce mais rapidamente com a variação da posição. Portanto, em cada ponto, a direção e o sentido de $\vec{E}$ correspondem à direção e ao sentido em que V decresce mais rapidamente, sendo sempre perpendicular à superfície equipotencial que passa no ponto considerado. Isso confirma a observação feita anteriormente, segundo a qual quando nos deslocamos no sentido do campo elétrico o potencial elétrico diminui.

A Equação (2.19) não depende da escolha particular do ponto para o qual V é igual a zero. Se mudássemos o valor desse ponto zero, o efeito seria fazer V variar pelo mesmo valor constante e assim as derivadas de V forneceriam sempre o mesmo valor.

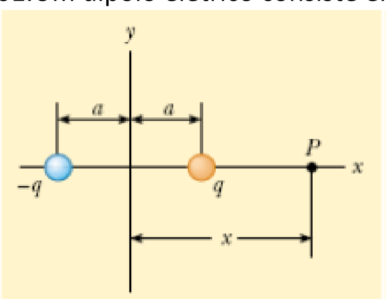
Quando $\vec{E}$ possui uma direção radial em relação a um ponto ou a um eixo e r é a distância até o ponto ou até o eixo, a relação correspondente à Equação (2.16) é dada por

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad (2.20)$$

De um modo geral, podemos determinar o campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas usando qualquer um dos dois métodos: diretamente, somando cada campo $\vec{E}$ gerado pelas cargas individuais puntiformes, ou então determinando primeiro o potencial e depois calculando seu gradiente para achar o campo elétrico. O segundo método costuma ser mais fácil porque o potencial é uma grandeza escalar, exigindo na pior hipótese a integração de uma função escalar. O campo elétrico é uma grandeza vetorial, exigindo a determinação de cada componente para cada elemento de carga e a integração separada para cada componente. Portanto, deixando de lado sua interpretação fundamental, o potencial fornece uma técnica de cálculo útil para as grandezas de campo.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01.Um dipolo elétrico consiste em duas cargas iguais e opostas separadas por uma distância 2a, como na Figura.



Um dipolo elétrico localizado no eixo x.

O dipolo está ao longo do eixo x e está centrado na origem. Calcule

a) o potencial elétrico em qualquer ponto P ao longo do eixo x.

b) o campo elétrico em pontos muito distantes do dipolo.

Solução

a) Utilizando a Equação 2.12, temos

$$V = K\sum_i \frac{Q_i}{r_i} = K\left(\frac{q}{x-a} + \frac{-q}{x+a}\right) = \frac{2kqa}{x^2 - a^2}$$

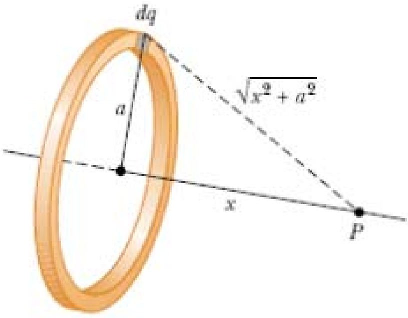
b) Se P está longe do dipolo, de tal forma que x>> a, então a^2 pode ser desprezado no termo x^2 - a^2 e V se torna

$$V \cong \frac{2kqa}{x^2} \quad \text{para } (x \gg a)$$

Utilizando a Equação 2.16 e esse resultado, calculamos o campo elétrico em P:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{4kqa}{x^3} \quad \text{para } (x \gg a)$$

02.Encontre o potencial elétrico e o campo elétrico em um ponto P situado no eixo de um anel uniformemente carregado de raio a e carga total Q. O plano do anel é perpendicular ao eixo x.



Um anel uniformemente carregado de raio a, cujo plano é perpendicular ao eixo x. Todos os segmentos dq do anel estão à mesma distância de qualquer ponto P no eixo x.

Solução

Vamos considerar P como estando a uma distância x do centro do anel, como na Figura. O elemento de carga dQ está a uma distância igual a $\sqrt{x^2+a^2}$ do ponto P. Dessa forma podemos escrever V como

$$V = k\int \frac{dQ}{r} = k\int \frac{dQ}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Neste caso, cada elemento dQ está à mesma distância de P. Sendo assim, o termo $\sqrt{x^2+a^2}$ pode ser removido da integral e V se reduz a

$$V = \frac{k}{\sqrt{x^2+a^2}}\int dQ = \frac{kQ}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

A única variável para V nesta expressão é x. Pela simetria, podemos ver que, ao longo do eixo x, $\vec{E}$ pode ter apenas uma componente x. Sendo assim, podemos utilizar a Equação 2.15 para encontrar a magnitude do campo elétrico em P:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -kQ\frac{d}{dx}(x^2+a^2)^{-1/2}$$

$$= -kQ\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+a^2)^{-3/2}(2x)$$

$$= \frac{kQx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

03.Encontre

a) o potencial elétrico e

b) a magnitude do campo elétrico ao longo do eixo perpendicular e central de um disco de raio a uniformemente carregado com uma densidade de carga de superficial σ .

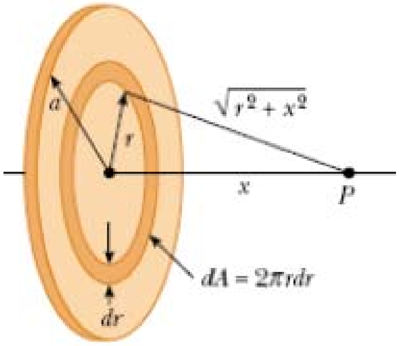
Solução

a)Escolhemos o ponto P a uma distância x do centro do disco e pegamos um plano do disco perpendicular ao eixo x. Podemos simplificar o problema dividindo o disco em uma série de anéis.

O potencial elétrico de cada anel é dada pela Equação

$$E_x = \frac{kQx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Considere um anel de raio r como dr e largura, como indicado na Figura. A área de superfície do anel é dA =2rπ dr ,da definição de densidade de carga superficial, sabemos que a carga sobre o anel é $\sigma dA = \sigma 2\pi r dr$.



A uniformemente carregada com um raio de um disco encontra-se em um plano perpendicular ao eixo x. O cálculo do potencial elétrico em qualquer ponto P sobre o eixo x é simplificada, dividindo o disco em muitos anéis de área $2r\pi$ dr cada.

Assim, o potencial no ponto P devido à este anel é

$$dV = \frac{kdQ}{(x^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{k\sigma 2\pi r dr}{(x^2 + r^2)^{1/2}}$$

Para encontrar o potencial elétrico total em P, que soma mais de todos os anéis que compõem o disco. Ou seja, nós integramos dV de r=0 a r=a:

$$V = k\sigma\pi \int_0^a \frac{2rdr}{(x^2 + r^2)^{1/2}} = k\sigma\pi \int_0^a (x^2 + r^2)^{-1/2} 2rdr$$

Este integral é da forma u^n du e tem o valor $u^{n+1}/n+1$ com n=-1/2 e $u=r^2+x^2$ onde e isso dá

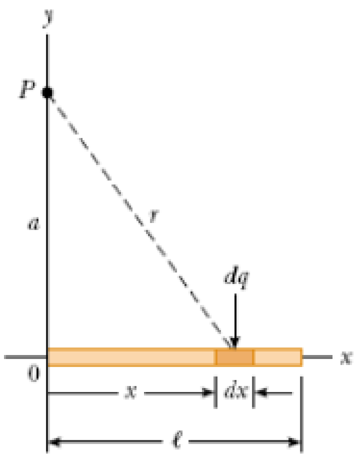
$$V = 2k\sigma\pi\left[\left(x^2 + a^2\right)^{1/2} - x\right]$$

b) Podemos encontrar o campo elétrico em qualquer ponto axial como

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}\right)$$

O cálculo de V e E para um ponto arbitrário fora do eixo é mais difícil de executar, e nós não tratamos esta situação neste texto.

04.Uma haste de comprimento ℓ situado ao longo do eixo x tem uma carga total Q e uma densidade de carga linear uniforme $\lambda = Q / \ell$. Encontre o potencial elétrico num ponto P localizado no eixo Y a uma distância uma a da origem.



A linha de carga uniforme de comprimento ℓ situado ao longo do eixo x. Para calcular o potencial elétrico em P, a linha de carga é dividida em segmentos cada um de comprimento dx e cada um carregando uma carga dQ =λdx.

Solução

O elemento de comprimento dx tem uma carga dQ = λdx.

Para esse elemento a uma distância $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ do ponto P, podemos expressar o potencial no ponto P devido a este elemento como

$$dV = \frac{kdQ}{r} = \frac{k\lambda dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Para obter o potencial total em P, integramos esta expressão sobre os limites x = 0 até x= ℓ. Notando que k e λ são constantes, nós achamos que

$$V = k\lambda \int_0^{\ell} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = k\frac{Q}{\ell}\int_0^{\ell} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Essa integral tem o seguinte valor

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}} = \ln\left(x + (x^2 + a^2)^{1/2}\right)$$

Avaliando V, vemos que

$$V=\left(\frac{kQ}{\ell}\right)\ln\left(\frac{\ell+(\ell^2+a^2)^{1/2}}{a}\right)$$

05.Duas cargas puntiformes estão localizadas sobre o eixo Ox, q_1 = -e no ponto x = 0 e q_2 = +e no ponto x = a.
a) Calcule o trabalho realizado por uma força externa para trazer uma terceira carga puntiforme q_3 = +e do infinito até o ponto x = 2a.
b) Calcule a energia potencial total do sistema constituído pelas três cargas.
Solução
a) O trabalho realizado sobre q_3 por uma força externa F_{ext} é igual à diferença de duas grandezas: a energia potencial U associada com q_3 quando ela está no ponto x = 2a e a energia potencial quando ela está no infinito. Esse último valor é zero, de modo que o trabalho realizado é igual a U. As distâncias entre as cargas são: r_{13} = 2a e r_{23} = a, então, de acordo com a Equação (2.7),

$$W=U=kq_3\left(\frac{Q_1}{r_{13}}+\frac{Q_2}{r_{23}}\right)=ke\left(\frac{-e}{2a}+\frac{e}{a}\right)=k\frac{e^2}{2a}$$

Quando trazemos q_3 do infinito ao longo do eixo +Ox, ela é atraída por Q_1, porém é repelida mais fortemente por Q_2; portanto, o trabalho realizado para trazer Q_3 até x - 2a deve ser positivo.
b) A energia potencial total do conjunto das três cargas é dada pela Equação (24.11):

$$U=k\sum_{i<j}\frac{Q_lQ_j}{r_{lj}}=k\left(\frac{Q_1Q_2}{r_{12}}+\frac{Q_1Q_3}{r_{13}}+\frac{Q_2Q_3}{r_{23}}\right)=k\left(\frac{-ee}{a}+\frac{-ee}{2a}+\frac{ee}{a}\right)=-k\frac{e^2}{2a}$$

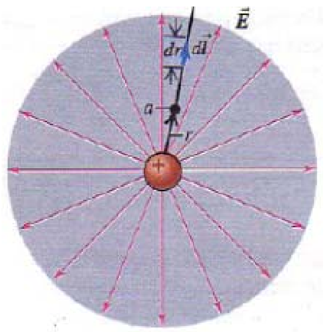
Como U < 0, o sistema possui uma energia potencial mais baixa do que teria se as distâncias entre as cargas fossem infinitas. Uma força externa precisaria realizar um trabalho negativo para trazer do infinito as três cargas até suas posições no conjunto e realizar um trabalho positivo para afastá-las de volta para o infinito.

06.Integrando o campo elétrico como na Equação (2.14), determine o potencial a uma distância r da carga Q.
Solução
Seja V o potencial a uma distância r da carga puntiforme. Como de costume, escolhemos o valor zero para o potencial em um ponto situado a uma distância infinita da carga. Para encontrarmos V, consideramos o ponto a na Equação (2.14) situado a uma distância r e o ponto b no infinito. Para fazermos a integral, podemos escolher qualquer trajetória que ligue esses dois pontos; a trajetória mais conveniente é uma linha reta radial, como indicado na Figura, de modo que $d\vec{\ell}$ é a direção radial e possui módulo dr. Considerando q positivo, $\vec{E}$ e $d\vec{\ell}$ são sempre paralelos, portanto (ϕ = 0 e a equação (24.17) fornece o resultado

$$V-0=\int_r^\infty E\cdot dr=\int_r^\infty\frac{kQ}{r^2}dr=-\frac{kQ}{r^2}\bigg|_r^\infty=0-\left(-\frac{kQ}{r}\right)$$

$$V=\frac{kQ}{r}$$

Isso está de acordo com a Equação (2.11)



Cálculo do potencial pela integral do campo $\vec{E}$ para uma única carga puntiforme.

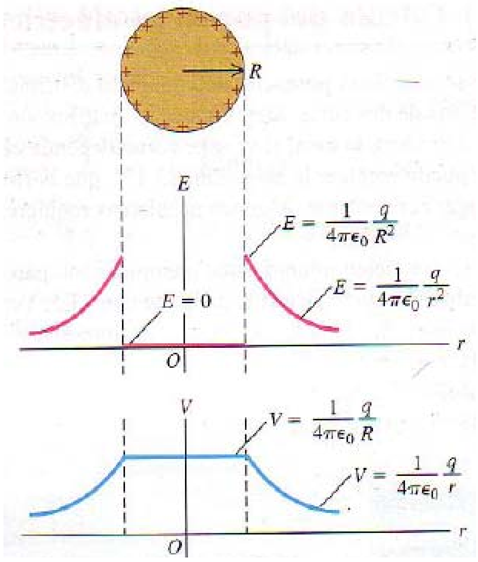
07.Uma esfera condutora maciça sem buracos possui um raio R e uma carga total Q. Determine o potencial em todos os pontos do exterior e do interior da esfera.
Solução
Já usamos a lei de Gauss para mostrar que em todos os pontos do exterior da esfera o campo elétrico é o mesmo que seria produzido removendo-se a esfera e colocando-se em seu centro uma carga puntiforme Q. Consideramos V = 0 no infinito, como no caso de uma carga puntiforme. Portanto, o potencial produzido pela esfera a uma distância r de seu centro é igual ao potencial produzido por uma carga puntiforme Q situada no centro da esfera:

$$V=\frac{kQ}{r}$$

O potencial na superfície da esfera é dado por $V_{sup} = Q/4\pi\varepsilon_0 R$.

O campo elétrico $\vec{E}$ é igual a zero em todos os pontos no interior da esfera; em caso contrário, ocorreria um movimento de cargas dentro da esfera. Portanto, se uma carga de teste se deslocasse de um ponto para outro no interior da esfera, nenhum trabalho seria realizado sobre essa carga. Isso significa que o potencial é constante em todos os pontos no interior da esfera e seu valor é igual ao potencial na superfície da esfera, ou seja, $Q/4\pi\varepsilon_0 R$.

O campo elétrico e o potencial de uma carga positiva Q são indicados em função de r na Figura. Nesse caso, o campo elétrico aponta radialmente para fora da esfera. À medida que você se afasta da esfera, no mesmo sentido de $\vec{E}$, V diminui (como era de esperar). O campo elétrico na superfície da esfera possui módulo dado por $E_{sup} = |Q|/4\pi\varepsilon_0 R^2$.



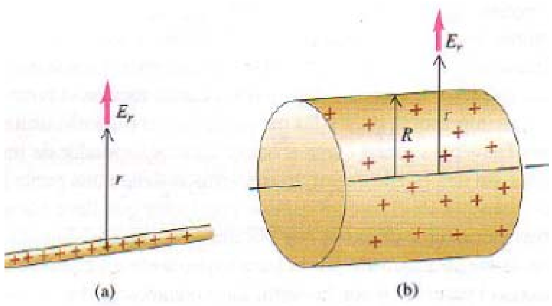
O módulo do campo elétrico $\vec{E}$ e o potencial V para pontos no interior e no exterior de um condutor esférico com uma carga positiva.

08.Calcule o potencial a uma distância r de um fio carregado muito longo com uma densidade de carga linear (carga por unidade de comprimento) igual a λ.

Solução

Verificamos no Exemplo 23.6 (Seção 23.5) que o campo elétrico a uma distância r de um fio carregado muito longo (Figura a) ou fora de um cilindro condutor muito longo (Figura b) possui um único componente radial dado por

$$E_r = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$



Campo elétrico fora de (a) um fio muito longo carregado positivamente; (b) um cilindro muito longo carregado positivamente.

Podemos calcular o potencial integrando $\vec{E}$ como indica a Equação (2.14). Visto que o campo elétrico possui um único componente radial, o produto escalar $\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$ é igual a $E_r\,dr$. Logo, o potencial em qualquer ponto a em relação a qualquer outro ponto b, situados a distâncias r_a e r_b do fio, é dado por

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Se considerarmos $V_b = 0$ em um ponto b no infinito, verificaremos que V_a se torna infinito:

$$V_a = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\infty}{r_a} = \infty$$

Isso mostra que, se tentarmos definir V como zero em um ponto no infinito, então V deverá ser igual a infinito para qualquer distância finita do fio. Logo, esse não é um modo útil para definir V para esse problema! Essa dificuldade, conforme dissemos anteriormente, é explicada porque a própria distribuição de cargas se estende até o infinito.

Para contornar essa dificuldade, lembre-se de que você pode definir V como zero em qualquer ponto que desejar. Vamos considerar $V_b = 0$ em um ponto b situado a uma distância radial arbitrária r_0. Então, o potencial $V = V_a$ em um ponto a a uma distância radial é dado por $V - 0 = (\lambda/2\pi\varepsilon_0)\ln(r_0/r)$, ou

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

Essa relação também fornece o potencial elétrico de um cilindro condutor carregado, porém considerando apenas valores de r iguais ou maiores do que o raio R do cilindro. Se escolhermos r_0 como o raio R do cilindro, então V = 0 quando r = R; logo, para qualquer ponto r > R, temos

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

onde r é a distância medida a partir do eixo do cilindro. No interior do cilindro, $\vec{E} = \vec{0}$ e V possui o mesmo valor (zero) existente na superfície do cilindro.

09.Uma carga elétrica Q está distribuída uniformemente ao longo de um fio retilíneo ou sobre uma barra fina de comprimento 2a. Calcule o potencial ao longo da reta perpendicular passando no centro da barra em um ponto P situado a uma distância x de seu centro.

Solução

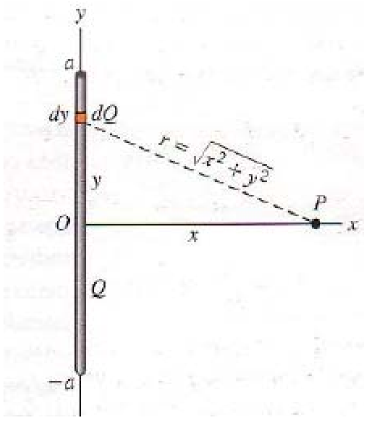


FIGURA 24.15 Cálculo do potencial elétrico ao longo da reta perpendicular passando no centro de uma barra fina de comprimento 2a.

Essa é a mesma situação descrita anteriormente. Como naquele exemplo, um elemento de carga dQ correspondente a um elemento de comprimento dy é dado por dQ = (Q/2a)dy. A distância entre dQ e o ponto P é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$, e o potencial infinitesimal dV no ponto P é dado por

$$dV = k\frac{Q}{2a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para obtermos o potencial no ponto P produzido pela barra inteira, integramos dV ao longo do comprimento da barra de y = -a até y = +a:

$$V = k\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Você pode procurar essa integral em uma tabela. O resultado é

$$V = k\frac{Q}{2a}\ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a}\right)$$

Quando o valor de x é muito elevado, o potencial V deve tender a zero; convidamos você a provar esse resultado.

10.Pela Equação (2.11), o potencial de uma carga puntiforme Q a uma distância radial r é dado por V = $Q/4\pi\varepsilon_0 r$. Calcule o vetor campo elétrico a partir dessa expressão de V.

Solução

Pela simetria do problema, o campo elétrico possui somente componente radial; logo, usamos a Equação (2.10) de modo que o vetor campo elétrico é dado por

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{kQ}{r}\right) = \left(\frac{kQ}{r^2}\right)$$

$$\vec{E} = \hat{r}E_r = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$$

EXERCÍCIOS PARA RESOLVER

01. O campo elétrico em um determinado local é nulo. Este fato significa, necessariamente, que o potencial elétrico no mesmo local também é igual a zero? Use um ponto sobre a linha entre os dois pontos de carga idênticos como um exemplo para apoiar o seu raciocínio.

02.Existe uma energia potencial elétrica quando dois prótons estão separados por uma certa distância. A energia potencial elétrica aumenta, diminui ou permanece a mesma quando
a) os dois prótons são substituídos por elétrons
b) apenas um dos prótons é substituído por um elétron? Justifique as suas respostas.

03. Um próton é fixado em um local. Um elétron é solto do repouso e permite-se que ele sofra uma colisão com o próton. Depois as posições do próton e a do elétron são trocadas, e o mesmo experimento é repetido. Qual tem a maior velocidade escalar quando as colisões ocorrem, o próton ou o elétron? Justifique a sua resposta

04.Uma carga de teste positiva é colocada em um campo elétrico. Em que direção a carga deve ser deslocada em relação ao campo, de modo que a carga esteja sujeita a um potencial elétrico constante? Explique.

05.Se uma partícula carregada positivamente se move na direção de um campo elétrico, sua energia potencial elétrica aumenta, diminui ou permanece a mesma? E no caso de uma partícula carregada negativamente?

06.Considere um ponto em que $\vec{E} = E\mathbf{i}$. A partir desse ponto, dê uma direção (em termos de um vetor unitário) em que o potencial
a) aumente
b) diminua
c) permaneça o mesmo.

07.Uma partícula carregada se move na direção de um campo elétrico e sua energia potencial aumenta. Qual é o sinal da carga da partícula?

08.Se se conhece o valor numérico do campo elétrico em um único ponto do espaço, é possível, com base nessa informação, determinar o potencial naquele ponto? Em caso afirmativo, como?

09.Se se conhece uma expressão do campo elétrico em termos de coordenadas em uma região do espaço, pode-se usar essa informação para determinar a diferença de potencial entre dois pontos dentro da região? Em caso afirmativo, como?

10.Você recebe a tarefa de guardar um instrumento de precisão de modo que ele não fique exposto a campos elétricos. Explique como pode fazer isso.

11.Os dispositivos de circuitos integrados são envolvidos em material condutor quando armazenados ou embarcados. Por quê?

12. Uma carga de +9q é fixada a um vértice de um quadrado, enquanto uma carga de -8q é fixada ao vértice diagonalmente oposto. Que carga, em função de q, de veria ser fixada no centro do quadrado para que o potencial seja nulo em cada um dos dois vértices vazios?

13. Quatro cargas idênticas (+2,0 μC cada) são trazidas do infinito e fixadas formando uma linha reta. As cargas estão localizadas a 0,40 m de distância uma da outra. Determine a energia potencial elétrica deste grupo.

14. Dois prótons estão se movimentando um em direção ao outro. Quando eles estão bem distantes, suas velocidades escalares iniciais são iguais a $3{,}00.10^{6}$ m/s. Qual a distância da aproximação máxima?

15. Duas cargas pontuais idênticas de + 1,7 μC são fixadas aos vértices diagonalmente opostos de um quadrado. A terceira carga é, então, fixada no centro do quadrado, de tal modo que ela faça com que os potenciais nos vértices vazios mudem de sinais sem mudar de módulos. Ache o sinal e o módulo da terceira carga.

16. Uma carga positiva de $+q_1$ está localizada 3,00 m à esquerda de uma carga negativa $-q_2$. As cargas têm módulos diferentes. Na linha que passa pelas cargas, o campo elétrico resultante é nulo em um ponto 1,00 m à direita da carga negativa. Nesta linha existem também dois pontos onde o potencial é nulo. Localize estes dois pontos em relação à carga negativa.

17. Três cargas puntiformes são posicionadas sobre o eixo x: q_1 na origem, q_2 em x = 2,0 m e q_3 em x = 16, 0 m. Se $q_1 = q_2$ = 2, 0μC e q_3 = -2, 0μC
a) Determine o potencial elétrico em x = 0, y = 3, 0 m.
b) Qual é a energia potencial elétrica acumulada neste sistema de três cargas?

18. Determine o campo E_x, E_y e E_z, para os potenciais seguintes, dados em volts,:
a) $V(x) = 1500 + 2040x$;
b) $V(x) = 1500 - 2040x$;
c) $V(x, y) = 2550 + 2040xy$;
d) $V(x, y) = 1500xy^2 - 2040x^2y$;
e) $V(x, y, z) = 1500zy^2 - 2040x^2y + 120z$.

19. Obtenha por integração o potencial elétrico de um anel de carga Q e raio R num ponto genérico z sobre o eixo do anel, supondo o mesmo centrado na origem O de um sistema de coordenadas cartesiano e disposto no plano xy.

20. Considere um ponto em que $\vec{E} = E\hat{\imath}$. A partir desse ponto, dê uma direção (em termos de um vetor unitário) em que o potencial
a) aumente
b) diminua,
c) permaneça o mesmo.

21.Uma carga puntiforme q_1 é mantida em repouso na origem. Uma segunda carga puntiforme q_2 é colocada em um ponto a e a energia potencial elétrica desse conjunto de duas cargas é igual a $5{,}4.10^{8}$ J. Quando a segunda carga se desloca até um ponto b, o trabalho realizado pela força elétrica sobre a carga é igual a $-1{,}9.10^{-8}$ J. Qual é a energia potencial elétrica desse conjunto de cargas quando a segunda carga se encontra no ponto b?

22. Três cargas puntiformes, cada uma delas com carga igual a +1,20 μC, são colocadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado 0,500 m. Qual é a energia potencial do sistema? (Considere U igual a zero quando a distância entre as cargas for infinita.)

23. Uma carga puntiforme q_1 = 4,00 nC é mantida em repouso na origem e uma segunda carga puntiforme q_2 = -3,00 nC é colocada sobre o eixo Ox no ponto x = +20,0 cm. Uma terceira carga puntiforme q_3 = 2,00 nC deve ser colocada sobre o eixo Ox entre q_1 e q_2. Considere a energia potencial igual a zero quando a distância entre as cargas for infinita,
a) Qual será a energia potencial do sistema quando a carga q_3 for colocada no ponto x = +10,0 cm?
b) Em que ponto a carga q_1 deve ser colocada para que a energia potencial do sistema seja igual a zero?

24. Três cargas puntiformes, inicialmente muito afastadas entre si, estão sobre os vértices de um triângulo equilátero de lado igual a d. Duas dessas cargas são idênticas e possuem carga q. Desejamos realizar um trabalho líquido igual a zero para colocar as três cargas nos vértices do triângulo; qual deve ser o valor da terceira carga?

25. Duas cargas puntiformes positivas, cada uma com módulo q, são fixadas sobre o eixo Oy nos pontos y = a e y = -a. Considere zero o potencial a uma distância infinita das cargas.
a) Faça um diagrama para mostrar as posições das cargas.
b) Qual é o potencial V_0 na origem?
c) Mostre que o potencial em qualquer ponto sobre o eixo Ox é dado por

$$\frac{2k}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

d) Faça um gráfico do potencial sobre o eixo Ox em função de x de x = -4a até x = +4a.
e) Qual é o potencial quando x>> a? Explique como esse resultado é obtido.

26.Uma carga positiva +q está localizada no ponto x = 0 e y = -a e uma carga negativa -q está localizada no ponto x = 0 e y = +a.

a) Faça um diagrama para mostrar as posições das cargas,
b) Deduza uma relação para o potencial V em qualquer ponto sobre o eixo Ox em função da coordenada x. Considere zero o potencial a uma distância infinita das cargas,
c) Faça um gráfico do potencial sobre o eixo Ox em função de x de x = -4a até x = +4a.
d) Qual seria a resposta do item (b) se as cargas trocassem de posição, ou seja, se +q fosse localizada em y = +a e -q em y = -a?

27.A uma certa distância de uma carga puntiforme, o potencial e o módulo do campo elétrico são dados respectivamente por 4,98 V e 12,0 V/m. (Considere zero o potencial a uma distância infinita da carga.)
a) Qual é o valor dessa distância?
b) Qual é o módulo da carga?
c) O campo elétrico está orientado para dentro ou para fora da carga?

28. Um fio retilíneo infinito possui uma densidade linear de carga igual a $5{,}00.10^{-12}$ C/m. Um próton (massa $1{,}67.10^{-27}$ kg, carga $+1{,}60.10^{-19}$ C) está a uma distância de 18,0 cm do fio e se desloca radialmente no sentido do fio com velocidade igual a $1{,}50.10^{3}$ m/s. Até que distância mínima do fio o próton pode se aproximar?

29. Uma haste isolante fina é encurvada formando um arco circular de raio a e uma carga elétrica total Q é distribuída uniformemente ao longo da haste. Considerando o potencial igual a zero a uma distância infinita, calcule o potencial no centro de curvatura do arco.

30. Considere três cargas pontuais q_1, q_2 e q_3, colocadas nos vértices de um triângulo eqüilátero de lado igual a L.
a) Determine o potencial elétrico no ponto onde se situa a carga q_1.
b) Calcule o trabalho realizado por uma força externa para deslocar a carga q_1 do vértice do triângulo até o infinito.
c) Calcule a energia potencial do sistema

31. Considere uma esfera maciça e homogênea de raio a e carga Q. Determine o potencial produzido por esta distribuição nos pontos externos a esta esfera.

32. Determine o módulo do campo elétrico produzido por uma esfera homogênea com carga Q e raio a para os pontos situados no interior da esfera, ou seja, para $r \leq a$.

33. Uma distribuição de cargas com simetria esférica produz, fora da distribuição, um campo elétrico dado por:

$$\vec{E}=\frac{a}{r^2}\hat{r}+\frac{b}{r^3}\hat{r}$$

onde a e b são constantes, r é a distância ao centro da distribuição e $\hat{r}$ é o vetor unitário do vetor posição. Obtenha a expressão do potencial elétrico em função de r.

34. O potencial de uma distribuição de cargas com simetria plana é dado por: $V= -ax^2 - bx^3$ onde a e b são constantes com dimensões apropriadas para tornar a expressão do potencial dimensionalmente homogênea. Determine a expressão do módulo do campo elétrico.

35. Uma certa distribuição de cargas produz um potencial elétrico dado por: $V= axy + bxy^2$
Determine:
a) o componente E_x do campo elétrico;
b) o componente E_y do campo elétrico;
c) o módulo do campo elétrico resultante.

36.Dê um exemplo de uma distribuição de cargas que produz campo elétrico nulo num ponto, mas potencial diferente de zero no mesmo ponto.

37. Considere um conjunto de n cargas pontuais de mesmo sinal (todas elas são positivas ou todas são negativas).
a) O campo elétrico produzido por este conjunto de cargas de mesmo sinal pode se anular em algum ponto do universo além do infinito?
b) Existe algum ponto em que o potencial se anula?

38. Indique pelo menos uma configuração contendo três cargas pontuais separadas por distâncias finitas, de tal modo que a energia potencial do sistema seja igual a zero.

39. Considere uma esfera de raio R com uma carga q distribuída uniformemente no volume da esfera. Em que ponto no exterior da esfera o potencial se reduz à metade do valor do potencial na superfície da esfera?

40. As cargas q_1 e q_2 estão fixas em posições específicas, q_2 estando localizada a uma distância d a direita de q_1. Uma terceira carga q_3 é, então, fixada na linha que une q_1 e q_2 a uma distância d a direita de q_2. A terceira carga é escolhida de maneira que a energia potencial do grupo seja nula; ou seja, a energia potencial tem o mesmo valor que aquele das três cargas quando elas estão amplamente separadas. Determine q_3, supondo que
a) $q_1 = q_2 = q$
b) $q_1 = q$ e $q_2 = -q$.
Expresse as suas respostas em termos de q.

41. Um elétron e um próton, partindo do repouso, são acelerados através de uma diferença de potencial elétrico de mesmo módulo. No processo, o elétron adquire uma velocidade escalar v_e, enquanto o próton adquire uma velocidade v_p.
a) Quando cada partícula é acelerada a partir do repouso, ela ganha energia cinética. Há perda ou ganho de energia potencial elétrica?
b) O elétron ganha mais, menos ou a mesma quantidade de energia cinética que o próton?
c) v_e é maior, menor ou igual a v_p? Justifique as suas respostas.

42. Uma carga pontual positiva está envolta por uma superfície eqüipotencial A, que tem um raio r_A. Uma carga de teste positiva se move da superfície A para outra superfície eqüipotencial B, que tem um raio r_B. No processo, a força elétrica realiza trabalho negativo,
a) A força elétrica que atua sobre a carga de teste tem a mesma direção e sentido que o deslocamento da carga de teste?
b) r_B é maior ou menor do que r_A?
Explique as suas respostas

43. (a) Calcule a velocidade de um próton que é acelerado a partir do repouso por uma diferença de potencial de 120 V. (b) Calcule a velocidade de um elétron que é acelerado pela mesma diferença de potencial.

44. (a) Encontre o potencial a uma distância de 1,00 cm de um próton. (b) Qual é a diferença de potencial entre dois pontos que estão a 1,00 cm e 2,00 cm de um próton? (c) Repita os itens (a) e (b) para um elétron.

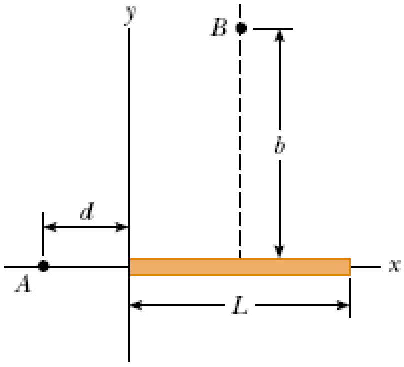
45. Demonstre que a quantidade de trabalho necessária para colocar quatro cargas pontuais idênticas de magnitude Q nos cantos de um quadrado de lado s é $5{,}41kQ^2/s$.

46. O potencial elétrico dentro de um condutor esférico carregado de raio R é dado por $V = kQ/R$ e fora do condutor é dado por $V= kQ/r$. Utilizando $E_r = -dV/dr$, derive o campo elétrico
a) dentro e
b) fora dessa distribuição de carga.

47. Em uma determinada região do espaço, o potencial elétrico é dado por $V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$. Encontre as expressões para as componentes x, y e z do campo elétrico nessa região. Qual é a magnitude do campo no ponto P, cujas coordenadas são (1, 0, - 2) m?

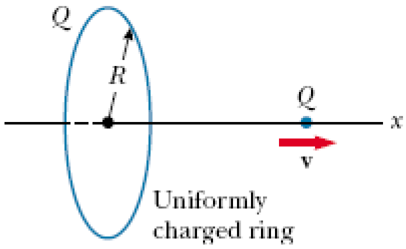
48. Considere um anel de raio R com a carga total Q uniformemente distribuída por seu perímetro. Qual é a diferença de potencial entre o centro do anel e um ponto no seu eixo a uma distância 2R do centro?

49. Uma barra de comprimento L (Figura) se encontra sobre o eixo x com sua extremidade esquerda na origem. Ela tem uma densidade de carga não uniforme $\lambda = \alpha x$, onde a é uma constante positiva,
a) Quais são as unidades de α?
b) Calcule o potencial elétrico em A.



50. Para o arranjo descrito no problema anterior, calcule o potencial elétrico no ponto B que se encontra na bissetriz perpendicular da barra a uma distância b acima do eixo x.

51. O eixo x é o eixo de simetria de um anel uniformemente carregado de raio R e carga Q. Uma carga pontual Q de massa M está localizada no centro do anel.



Quando ela é levemente deslocada, a carga pontual acelera ao longo do eixo x para o infinito. Demonstre que a velocidade final da carga pontual é

$$v = \left(\frac{2k_eQ^2}{MR}\right)^{1/2}$$

52.Calcular o trabalho de um operador para montar o sistema constituído pelas quatro cargas elétricas puntifomes e positivas, de valor q, dispostas em um quadrado de lado a, como mostra a figura que se segue. O meio é o vácuo e a constante eletrostátíca é K_0.